



REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix – Travail – Patrie

UNIVERSITE DE DOUALA

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE
POLYTECHNIQUE DE DOUALA

B.P. 2701 Douala
Tél. (237) 697 542 240
Site web : www.enspd-udo.cm

REPUBLIC OF CAMEROON
Peace – Work – Fatherland

THE UNIVERSITY OF DOUALA

NATIONAL HIGHER POLYTECHNIC
SCHOOL OF DOUALA

P.O.Box:2701 Douala
Phone : (237) 697 542 240
Email: contact@enspd-udo.cm



Dr. NDOMBOU

SUPPORT DE COURS DE PROBABILITES ET STATISTIQUES

**NIVEAU 3
(SCIENCES DE L'INGENIEUR)**

ANNEE ACADEMIQUE : 2025/2026

CONTENU

-Concepts De Variables Aleatoires,Lois De Probalites

-Esperance,Variance Et Ecart Type

-Lois Importantes :Bionomiale,Poisson,Normale,Exponentielle

-Echantillonnage et estimations

-Test D,Hypothese Et Intervalles De Confiance

CHAPITRE 1

ANALYSE COMBINATOIRE

L'analyse combinatoire comprend un ensemble des méthodes qui permettent de déterminer la nature de tous les résultats possibles d'une expérience et avant commencer sur les outils de base de l'analyse combinatoire on va donner un bref survol de la théorie des ensembles et les Opérations logiques.

1.1 Opérations ensemblistes

Les ensembles seront principalement notés à l'aide de lettres majuscules A ; B ; C ; D ..etc., tandis que les objets qui les composent, ses éléments, seront désignés par des lettres minuscules i ; j ; k ; l ; x ; y ,...etc. Pour signifier l'appartenance d'un élément i à un ensemble A , on dit parfois que " i est dans A ", on le note $i \in A$. Si au contraire un élément i n'appartient pas à A , on note $i \notin A$.

1.1.1 Réunion d'ensembles

La réunion de deux ensembles A et B , notée $A \cup B$, est l'ensemble constitué des éléments de A et des éléments de B . On a toujours $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$.

Propriétés 1.1 (*Commutativité*)

$$A \cup B = B \cup A$$

Propriétés 1.2 (*Commutativité*)

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C := A \cup B \cap C$$

1.1.2 Intersection d'ensembles

L'intersection de deux ensembles A et B , notée $A \cap B$, est l'ensemble constitué des éléments étant à la fois dans A et dans B . On a toujours $A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset$. Lorsque A et B n'ont aucun élément en commun, on dit qu'ils sont disjoints et on note $A \cap B = \emptyset$.

Propriétés 1.3 (*Commutativité*)

$$A \cap B = B \cap A$$

Propriétés 1.4 (*Associativité*)

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C := A \cap B \cap C$$

Propriétés 1.5 (*Distributivité*)

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

1.1.3 Complémentaire d'un ensemble

Soit Ω un ensemble et A une partie de Ω . Le complémentaire de A dans Ω , notée $\Omega \setminus A$, ou $\overline{A}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur (ou encore A^c), est l'ensemble constitué des éléments de $\Omega \setminus A$ qui ne sont pas éléments de A . On appelle aussi parfois " $\Omega \setminus A$ privé de A " l'ensemble $\Omega \setminus A$.

Par ailleurs, on a toujours $\overline{\overline{A}} \cup A = \emptyset$ et $\overline{\overline{A}} \cap A = \emptyset$

Propriétés 1.6 (*Lois de Morgan*)

$$\overline{A \cup B} = (\overline{A} \cap \overline{B})$$

$$\overline{A \cap B} = (\overline{A} \cup \overline{B})$$

1.1.4 Inclusion

Si tous les éléments d'un ensemble A sont aussi éléments d'un autre ensemble B , on dit que "**A est inclus dans B**" et on le note $A \subset B$. On dit aussi que " A est un sous-ensemble de B ".

On a toujours

$$A \subset A \cup B; A \cap B \subset A; A \cap B \subset A \cup B; \emptyset \subset A$$

1.1.5 Opérations ensemblistes et Opérations logiques

On peut dès à présent noter le lien entre ces opérations et les opérations (ou connecteurs) logiques "OU", "ET" et "NON" : Un élément de $A \cup B$ est un élément qui appartient à A "OU" à B . Un élément de $A \cap B$ est un élément qui appartient à A "ET" à B . Un élément de $\overline{A}$ est un élément qui n'appartient PAS à A .

Attention 1 Le connecteur logique OU mentionné correspond à un "ou inclusif" : $A \cup B$ est l'ensemble des éléments qui sont dans A , ou dans B mais qui peuvent être dans les 2.

1.1.6 Ensemble fini

Définition 1.1 On appelle **ensemble fini** un ensemble ayant un nombre fini d'éléments distincts.

Définition 1.2 Le nombre d'éléments d'un ensemble fini A est appelé **cardinal** de A , noté $\text{card}[A]$.

Exemple 1.1 $E = \{a; b; c\}$ et $\text{card}[E] = 3$.

Cardinal

Propriétés 1.7 Soient A et B deux ensembles finis quelconques,

$$\text{card}[A \cup B] = \text{card}[A] + \text{card}[B] - \text{card}[A \cap B]$$

Si A et B sont disjoints, c'est-à-dire que $A \cap B = \emptyset$ alors,

$$\text{card}[A \cup B] = \text{card}[A] + \text{card}[B]$$

Corollaire 1.1 Soit A est un sous ensemble de E .

$$\text{card}[\overline{A}] = \text{card}[E] - \text{card}[A]$$

Cardinal d'un produit cartésien

Définition 1.3 Soient E et F deux ensembles, le **produit cartésien** noté $E \times F$ est l'ensemble de tous les couples $(x; y)$ où x est élément de E et y élément de F .

Attention 1.1 $E \times F$ est différent de $F \times E$.

Théorème 1.1 Si E et F sont finis, on a :

$$\text{card}[E \times F] = \text{card}[E] \times \text{card}[F]$$

1.2 Dénombrements

Dans le cadre d'un ensemble fini E , la problématiques consiste en :

- la constitution des collections d'ensembles ou d'applications ayant une caractéristique commune (cas favorable),
- comptabiliser le nombre d'objets constituant cette collection. Le dénombrement ne s'applique qu'à des ensembles finis et fait intervenir deux critères fondamentaux pour la constitution et la distinction des objets à dénombrer : la répétition et l'ordre.

Définition 1.4 (Répétition) Lors de la constitution des collections, chaque élément de E peut être utilisé plusieurs fois.

Définition 1.5 (Ordre) Pour distinguer deux collections, on peut tenir compte de l'ordre des éléments qui les composent.

Remarque 1.1 Si l'on autorise la répétition on doit nécessairement faire intervenir l'ordre.

1.2.1 Nombre de partie d'un ensemble fini

Propriétés 1.8 Soit E un ensemble contenant n éléments. Il y a 2^n parties distinctes de E .

Démonstration : Il existe diverses démonstrations de cette propriété. On peut par exemple utiliser un arbre et faire une correspondance entre une feuille et une partie. On peut également utiliser la formule du binôme de Newton...

1.2.2 La notion de p-listes

Définition 1.6 Soit E un ensemble contenant n éléments. Une p -liste d'éléments de E , est une liste ordonnée de p éléments de E avec répétitions possible.

Propriétés 1.9 (Expression du nombre de p -listes) Le nombre de p -liste distinctes est égal à n^p .

Exemple 1.2 Considérons l'ensemble $E = \{1, 2, 3, A, B\}$ correspondant aux différentes touches d'un clavier de digicode dont le code est une succession de 3 caractères issus de E . Combien y-a-t-il de code différents ? Ce sont les 3-listes de E il y en a 5^3 soit 125.

1.2.3 Les arrangements

Considérons E_n un ensemble fini contenant n éléments différents et p un entier naturel inférieur ou égal à n .

Définition 1.7 Un **arrangement** à p éléments de E_n est un échantillon ordonné sans remise de p éléments différents de E_n .

Propriétés 1.10 (Expression du nombre d'arrangements) Le nombre d'arrangements à p éléments de E_n noté A_p^n est égal à :

$$A_p^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1)$$

Démonstration : Pour le premier élément, on a n choix possibles. Le premier étant fixé, pour le deuxième élément, on a $(n-1)$ choix possibles le tirage étant sans remise. Le premier et le deuxième étant fixés pour le troisième élément, on a $(n-2)$ choix possibles... et ainsi de suite jusqu'au p ème élément, pour lequel on a $[n - (p-1)] = n-p+1$ choix possible. On a donc bien

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1)$$

arrangements à p éléments de E_n .

Définition 1.8 On appelle **factorielle** n le produit des n premiers entier :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1$$

. avec la convention $0! = 1$.

Propriétés 1.11

$$A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1) &= \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1) \times (n-p) \times \dots \times 1}{n \times (n-p) \times \dots \times 1} \\ &= \frac{n!}{(n-p)!} \end{aligned}$$

Remarque 1.2 $n!$ est une touche de la plupart des calculatrices.

Exemple 1.3 Un joueur se demande combien il peut écrire de grilles différentes de tiercé pour une course de 16 chevaux. Il y a 16 possibilités pour le premier, 15 pour le second et 14 pour le troisième. On n'accepte pas les répétitions et on tient compte de l'ordre, il s'agit d'arrangements et on a donc $A_3^{16} = 16 \times 15 \times 14 = 3360$ possibilités.

1.2.4 Les permutations

Définition 1.9 (Les permutations) Une permutation de E_n est un échantillon ordonné sans remise des n éléments différents pris dans E_n . C'est donc le cas particulier d'un arrangement de n éléments de E_n .

Propriétés 1.12 Le nombre de permutations de E_n est donc égal à : $P_n = n!$

Exemple 1.4 Si le joueur de tiercé a précédemment choisi les 3 chevaux qu'il va jouer mais ne sait pas dans quel ordre il va les placer, il a 3! choix possibles c'est à dire $3 \times 2 \times 1 = 6$ possibilités de tiercé.

1.2.5 Les combinaisons

Soit E_n un ensemble fini contenant n éléments différents et p un entier naturel inférieur ou égal à n .

Définition 1.10 Une **combinaison** à p éléments de E_n est un échantillon non ordonné sans remise de p éléments différents de E_n . C'est un sous ensemble p éléments de E_n . Dans une combinaison de p éléments, les p éléments sont distincts et non ordonnés.

Propriétés 1.13 (Expression du nombre de combinaisons) Le nombre de combinaisons à p éléments de E_n noté C_p^n est égal à :

$$C_p^n = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$C_p^n = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Démonstration : On considère les p premiers éléments de E_n . Avec ces p éléments on peut former $p!$ arrangements et ces $p!$ arrangements donnent une seule combinaison or on peut former A_p^n arrangements avec les n éléments de E_n . on a donc A_p^n $p!$ combinaisons différentes de E_n .

Remarque 1.3 – Si $p = 0$ alors on a une seule combinaison à zéro élément : la partie vide.
 – Si $p = n$ alors on a une seule combinaison à n éléments de E_n : la partie E_n .
 – Si $p = 1$ alors on a n combinaisons à un élément de E_n , les n sous-ensembles à un élément de E_n .

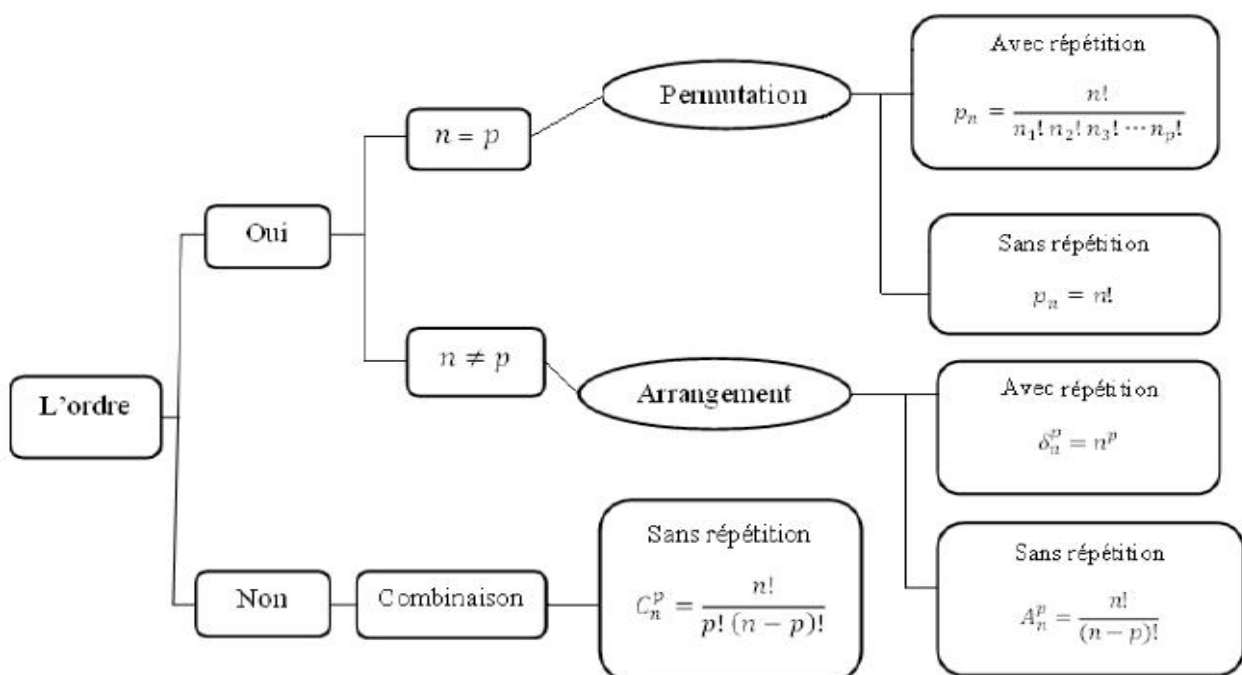


FIGURE 1.1 – Résumé les opérations sur l'analyse combinatoire

Exemple 1.5 Nous avons vu ci-dessus avec l'exemple du joueur de tiercé que quand on a choisi sans ordre une partie de 3 éléments parmi 16, il reste $3! = 6$ manières d'ordonner cette partie. Par exemple si on choisit la partie (2,7,9) on peut lui associer les 6 permutations : (2,7,9), (2,9,7), (7,2,9), (7,9,2), (9,2,7) et (9,7,2). En d'autres termes il est possible de regrouper les arrangements par paquets de 6 correspondant à la même partie. Le nombre d'arrangements (ordonnés) de 3 éléments parmi 16 est donc égal à 6 fois le nombre de combinaisons (non ordonnées) de 3 éléments parmi 16. On a donc une application du "Principe des bergers" :

$$C_{16}^3 = \frac{A_{16}^3}{3!}$$

Propriétés 1.14

$$\begin{aligned} C_p^n &= C_{n-p}^n \\ &= C_{p-1}^{n-1} + C_p^{n-1} \end{aligned}$$

Démonstration :

1. Choisir les p éléments que l'on veut dans un ensemble de n éléments revient exactement à choisir les $n - p$ éléments que l'on ne veut pas, d'où le résultat. Mathématiquement, on a :

$$\begin{aligned} C_p^n &= \frac{n!}{(n-p)! [n - (n-p)]!} \\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \\ &= C_p^n \end{aligned}$$

2. Soit E un ensemble de n éléments. Soit A l'un de ces éléments. Pour choisir p éléments de E , je peux soit prendre A et en choisir $p-1$ autres parmi les $n-1$ restants (j'ai alors C_{p-1}^{n-1} possibilités), soit laisser A et en prendre p autres parmi les $n-1$ restants (j'ai alors C_p^{n-1} possibilités). D'où le résultat. Mathématiquement, on a :

$$\begin{aligned} C_{p-1}^{n-1} + C_p^{n-1} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{(p)!(n-p-1)!} \\ &= \frac{p(n-1)!}{p!(n-p)!} + \frac{(n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{(p+n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!} \\ &= C_p^n \end{aligned}$$

Remarque 1.4 Quand $n > p/2$ il est plus rapide de calculer C_{n-p}^n que C_p^n . Par exemple :

$$\begin{aligned} C_{32}^2 &= C_{32}^{30} \\ C_{32}^2 &= \frac{32 \times 31}{2 \times 1} \\ C_{32}^{30} &= \frac{32 \times 31 \times \dots \times 4 \times 3}{30 \times 29 \times \dots \times 2 \times 1} \end{aligned}$$

1.3 Triangle de pascal

Les formules de calcul ci-dessus nous donnent une méthode de calcul des combinatoire par récurrence appelé triangle de pascal :

1.4 Formule du binôme de Newton

Théorème 1.2 Soient a et b deux réels :

$$\begin{array}{cccccccc}
 n = 0 & & & & & & & 1 \\
 n = 1 & & & & & & \xrightarrow{+} & 1 \\
 & & & & & \downarrow = & & \\
 n = 2 & & & & & 2 & \xrightarrow{+} & 1 \\
 & & & & & \downarrow = & & \\
 n = 3 & & & & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & & & & & \downarrow = & & & & \\
 n = 4 & & & & & 4 & \xrightarrow{+} & 6 & & 4 & \xrightarrow{+} & 1 \\
 & & & & & \downarrow = & & \downarrow = & & & \\
 n = 5 & & & & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & & & & &
 \end{array}$$

FIGURE 1.2 – Triangle de pascal

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^p a^k b^{n-k}$$

Chapitre 2

Introduction au calcul des probabilités

2.1 Espace probabilisable

2.1.1 Espace échantillon

Définitions : On appelle expérience aléatoire ou épreuve, toute expérience dont le résultat est régi par le hasard lorsqu'on répète l'expérience dans les mêmes conditions.

On appelle l'ensemble des tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire espace échantillon ou espace des épreuves. On le note Ω .

2.1.2 Algèbre-Tribu

Définition 2.3 Soit Ω un espace échantillon, une algèbre $\mathcal{A}$ sur Ω est une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant :

- i $\Omega \in \mathcal{A}$
- ii $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$
- iii $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

Définition 2.4 Soit Ω un espace échantillon, une tribu ou une σ -algèbre $\mathcal{F}$ sur Ω est une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant :

- i $\Omega \in \mathcal{A}$
- ii $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$
- iii Si $\{A_k, k \in \mathbb{N}\}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{F}$ alors :

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{F}$$

2.2 Espace de probabilité

Dans tout ce qui suit $(\Omega, \mathcal{F})$ désigne un espace probabilisable.

Définition 2.6 Soient $A, B, A_1, A_2, \dots, A_n$ des éléments de $\mathcal{F}$.

- a On dit que A et B sont incompatibles ou disjoints si $A \cap B = \emptyset$
- b On dit que $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont deux à deux incompatibles si pour tout $1 \leq i \neq j \leq n : A_i \cap A_j = \emptyset$
- c On dit que $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une partition de Ω , s'ils sont deux à deux incompatibles et si :

$$\bigcup_{k=1}^n A_k = \Omega$$

Nous pouvons à présent donner la définition d'une probabilité :

Définition 2.7 On appelle probabilité, toute application $\mathbb{P} : \Omega \rightarrow [0, 1]$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

i $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

ii σ -additivité : Pour toute famille $A_k, k \geq 1$ d'éléments de $\mathcal{F}$ deux à deux incompatibles, on a :

$$\mathbb{P}(\cup_{k \geq 1} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)$$

Définition Si $(\Omega, \mathcal{F})$ est un espace probabilisable, $\mathbb{P}$ une probabilité définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$, alors le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est appelé espace de probabilité.

Proposition Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $A, B \in \mathcal{F}$, alors :

1. $\forall E \in \mathcal{F}, 0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$.
2. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
3. $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$.
4. Croissance : $\mathbb{P}$ est une application croissante :

$$A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B).$$

5. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

2.2.1 Le cas équiprobable

Supposons dans ce paragraphe que Ω est un ensemble fini avec $\text{card}(\Omega) = n$, on peut l'écrire : $\Omega = w_1, w_2, \dots, w_n$. Supposons aussi que tous les événements $\{w_k\}$ sont équiprobables ou uniformes i. e.

$$\mathbb{P}(\{w_1\}) = \mathbb{P}(\{w_2\}) = \dots = \mathbb{P}(\{w_n\})$$

En utilisant les propriétés de la probabilité $\mathbb{P}$ (définition 2.7), on a par la propriété de σ -additivité :

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\cup_{k=1}^n \{w_k\}) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(\{w_k\}) = n\mathbb{P}(\{w_1\})$$

Par suite

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \mathbb{P}(\{w_k\}) = \frac{1}{n}$$

Soient à présent $1 \leq k \leq n, A \subset \Omega$, avec $\text{card}(A) = k$. Dans ce cas on peut écrire $A = \{w'_1, w'_2, \dots, w'_k\}$, où chaque w'_k est choisit dans l'ensemble Ω . Ainsi

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\cup_{j=1}^k \{w'_j\}) = \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(\{w'_j\}) = k\mathbb{P}(\{w'_1\}) = \frac{k}{n}$$

On a alors prouvé le résultat suivant :

Théorème 2.1 Dans le cas équiprobable, la probabilité d'un événement A est donnée par

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Théorème des probabilités totales

Théorème 1.34 Soit (Ω, T, p) un espace de probabilité, et soit la famille d'événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ qui forme un système complet de Ω tel que $p(A_i) > 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Alors pour tout événement $B \in T$, on a

$$p(B) = \sum_{i=1}^n p(A_i) p(B/A_i).$$

Démonstration.

$$p(B) = p(B \cap \Omega) = p\left(B \cap \left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)\right) = p\left(\bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i)\right) = \sum_{i=1}^n p(B \cap A_i),$$

car les événements $A_i \cap B$ sont disjoints deux à deux. En utilisant la définition de la probabilité conditionnelle, on trouve

$$p(B) = \sum_{i=1}^n p(A_i) p(B/A_i).$$

2.3 Probabilité conditionnelle

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $A \in \mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}(A) > 0$.

Définition 2.9 Pour $A \in \mathcal{F}$, on désigne par $\mathbb{P}(A/B)$ la probabilité de A sachant B , elle est définie par :

$$\mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Exemple 2.1. On jette successivement deux dés équilibrés. calculer la probabilité des événements suivants :

1. A : "La somme des chiffres sur les deux dés est un nombre pair".
2. B : "La somme des chiffres sur les deux dés est un nombre pair sachant que le premier dé a donné le chiffre 5".

Solution : Dans cet exemple $\Omega = \{(x, y)/x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$. D'autre part, la somme de deux chiffres est paire si et seulement si les deux chiffres sont pairs ou impairs, d'où

$$A = \{(x, y)/x, y \in \{1, 3, 5\}\} \cup \{(x, y)/x, y \in \{2, 4, 6\}\}$$

Par conséquent, $\text{card}(A) = 9 + 9 = 18$ et on a

$$\mathbb{P}(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

Pour le second évènement introduisons l'évènement C : "le premier de a donne le chiffre 5" On a ainsi $A \cap C = \{(5, y)/y \in \{1, 3, 5\}\}$ et on a $\text{card}(A \cap C) = 3$. Donc

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A/C) = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{3/36}{3/6} = \frac{1}{6}$$

2.4 Théorème de Bayes

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ une partition de Ω , $A \in \mathcal{F}$ et supposons que $\mathbb{P}(A) > 0$ et que $\mathbb{P}(A_k) > 0$ pour tout $1 \leq k \leq n$. Soit $1 \leq k \leq n$, on a par les equations (2.11) :

$$\mathbb{P}(A \cap A_k) = \mathbb{P}(A/A_k)\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(A_k/A)\mathbb{P}(A)$$

Par conséquent

$$\mathbb{P}(A_k/A) = \frac{\mathbb{P}(A/A_k)\mathbb{P}(A_k)}{\mathbb{P}(A)} =$$

En faisant appel à la formule des probabilités totales dans cette dernière égalité, on obtient :

Théorème 2.2 Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ un système complet de Ω , $A \in \mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}(A) > 0$, $\mathbb{P}(A_k) > 0$ pour tout $1 \leq k \leq n$. Alors

$$\mathbb{P}(A_k/A) = \frac{\mathbb{P}(A/A_k)\mathbb{P}(A_k)}{\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A/A_k)\mathbb{P}(A_k)}$$

Remarque 2.11 La formule de Bayes est appelée aussi la formule des causes, en effet la quantité $\mathbb{P}(A_k/A)$ donne la probabilité que l'évènement A s'est réalisé à travers A_k ou "à cause" de A_k .

Exemple 2.11 On effectue un test dans un grand élevage de bovins pour dépister une maladie. Ce test a permis de déceler 1.8

1. Quelle est la probabilité qu'un animal choisis au hasard dans cet élevage soit atteint de cette maladie.
2. L'animal choisi est atteint de cette maladie, quelle est la probabilité qu'il soit un mâle.

Solution :

Introduisons les évènements suivants :

- A : "L'animal choisi est atteint de cette maladie".

- M : "L'animal choisi est un mâle".

Pour la première question, on cherche $\mathbb{P}(A)$. On a par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A/M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(A/\bar{M})\mathbb{P}(\bar{M}) \\ &= (0.018)(0.35) + (0.012)(0.65) \\ &= 0.0141.\end{aligned}$$

Pour la deuxième question on cherche $\mathbb{P}(M/A)$. On a par la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}(M/A) = \frac{\mathbb{P}(A/M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{(0.018)(0.35)}{0.0141} = 0.4468.$$

2.5 Indépendance des événements

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, un espace de probabilité, $A, B \in \mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}(B) > 0$.

Définition 2.10 On dit que les événements A et B sont indépendants si :

$$\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(A)$$

Remarque 2.12 Soient A et B deux événements de Ω : - Intuitivement, A et B sont indépendants si la réalisation de B n'influe pas sur la réalisation de A et vice versa.

- Si A et B sont indépendants et si $\mathbb{P}(A) > 0$, alors il n'est pas difficile de voir qu'on a aussi :

$$\mathbb{P}(B/A) = \mathbb{P}(B)$$

Une conséquence importante de la définition est :

Théorème 2.3 Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si :

$$\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Remarque 2.13 On peut prendre l'équation (2.15) comme définition pour l'indépendance de deux événements, dans ce cas on est pas obligé de supposer que la probabilité de l'un des deux événements est strictement positive.

Exemple 2.12 On jette une pièce de monnaie deux fois de suite et on considère les événements :

- A : "On obtient pile au premier jet"
- B : "On obtient le même résultat dans les deux jets"
- C : "On obtient pile dans les deux jets"

Pour cette expérience on a $\Omega = \{(x, y)/x, y \in \{pile, face\}\}$, ainsi $\text{card}(\Omega) = 4$. D'autre part :

$$A = \{(pile, pile), (pile, face)\}, B = \{(pile, pile), (face, face)\},$$

$$C = \{(pile, pile)\}, A \cap B = \{(pile, pile)\}, A \cap C = \{(pile, pile)\},$$

d'où

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{4}$$

. Par suite

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

. Ainsi A et B sont indépendants. Mais

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$$

ce qui montre que A et C ne sont pas indépendants.

Chapitre 3

Variables aléatoires

3.1 Définition générale d'une variable aléatoire

Définition 3.1 On appelle variable aléatoire le résultat d'une épreuve aléatoire lorsque l'issue de celle-ci peut être représentée par un nombre.

Une variable aléatoire est généralement désignée par une lettre majuscule X , Y , etc. et peut également être définie en tant qu'application depuis l'univers Ω vers $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} X : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ w &\mapsto X(w) \end{aligned}$$

en considérant $w \in \Omega$ comme une réalisation particulière de l'épreuve en question. L'ensemble des valeurs numériques prises par X est pour cette raison noté $X(\Omega)$, puisqu'il s'agit de l'image de Ω par X .

3.2 Variable aléatoire discrète

Définition 3.2 On appelle variable aléatoire discrète une variable aléatoire qui ne prend que des valeurs ponctuelles ("isolées").

Exemple 3.1 Résultat d'un jet de dé. Le résultat X est une variable aléatoire

$$X : \Omega \ni w \mapsto X(w)$$

à valeur dans $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ - Lancer de 2 pièces de monnaies identiques dont l'issue est P (pour pile) et F (pour face).

L'univers

$$\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$$

n'est pas composé de grandeur numériques mais on peut par exemple s'intéresser au nombre de fois où face (F) est apparu, définissant ainsi une variable aléatoire X :

$X : \Omega \rightarrow \{0, 1, 2\} \subset \mathbb{R}$ définie par le tableau

Ω	PP	PF	FP	FF
X	0	1	1	2

TABLE 3.1 – Distribution d'une variable aléatoire (X = nombre de "Face")

Cette application ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, la variable aléatoire X est discrète avec $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

Les événements $\{X = x_i\}$ (x_i étant une valeur possible de X), engendrés par les différentes valeurs prises par une variable aléatoire constituent les événements élémentaires de X . Les événements élémentaires de l'exemple précédent seront ainsi notés $\{X = 0\}$ ("Aucun face n'a été tiré"), $\{X = 1\}$ ("Un face a été tiré") et $\{X = 2\}$ ("Deux faces ont été tirés"). On définit donc naturellement des variables aléatoires en associant un nombre à chaque événement élémentaire. Comme on le verra, l'étude systématique des variables aléatoires fournit un cadre théorique d'étude des phénomènes aléatoires.

3.3 Loi d'une variable aléatoire discrète

Définition 3.3 *La loi d'une variable aléatoire discrète X est une probabilité $\mathbb{P}_X$ définie sur ses événements élémentaires par l'application*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_X : X(\Omega) &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto \mathbb{P}_X := \mathbb{P}[\{X = x\}]\end{aligned}$$

On note invariablement $\mathbb{P}[\{X = x\}]$, $\mathbb{P}[X = x]$, $P_X(x)$ ou $p(x)$ la probabilité que X prenne la valeur x . On vérifie aisément que cette application est bien une probabilité dont l'univers est l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X .

3.3.1 Fonction de répartition

Définition 3.4 *Une loi de probabilité est souvent définie à partir de sa fonction de répartition*

$$\begin{aligned}F : \mathbb{R} &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto F(x) = \mathbb{P}[X \leq x]\end{aligned}$$

parfois également appelée fonction cumulative car on cumule les probabilités de toutes les valeurs inférieures ou égales à x .

Dans le cas discret, il suffit d'additionner les probabilités élémentaires :

$$F(x_i) = P[X \leq x_i] = P[X = x_1] + \dots + P[X = x_i] = p_1 + p_2 + \dots + p_i :$$

Propriétés 3.1 *Si X est une variable aléatoire discrète de fonction de répartition F , alors on a les propriétés suivantes :*

- F est une fonction en escalier avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.
- F est une fonction croissante.
- Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$,

$$F(b) - F(a) = P[a < X \leq b]$$

La croissance se déduit de ce dernier point puisque si $a < b$, $F(b) - F(a) = P[a < X \leq b] \in [0, 1]$ est en particulier positif.

3.3.2 Espérance mathématique

Définition 3.5 L'espérance mathématique $E[X]$ d'une variable aléatoire X joue le rôle dévolu à la moyenne en statistiques : elle correspond à la valeur moyenne espérée

par un observateur lors d'une réalisation de la variable aléatoire X . Les valeurs prises par cette variable sont pondérées par les probabilités des événements élémentaires de sorte que l'on définit

$$E(x) = \sum_{i=1}^N p_i * x_i = \sum_{i=1}^N x_i * \mathbb{P}[X = x_i]$$

lorsque X peut prendre N valeurs différentes $x_1, \dots, x_N$ avec comme probabilités élémentaires $p_i = P[X = x_i]$.

3.3.3 Variance

Pour décrire plus précisément le comportement de X , sans pour autant caractériser complètement la loi de X , on peut s'intéresser aux écarts de X par rapport à cette moyenne. Cependant, si on considère simplement la différence $X - E[X]$, on obtient un écart moyen $E[X - E[X]] = 0$ (par linéarité de l'espérance, voir 3.3). On pourrait considérer la valeur moyenne de $X - E[X]$ mais on préfère considérer la moyen de $(X - E[X])^2$, plus pertinente mathématiquement.

Définition 3.6 La variance mesure ainsi la déviation moyenne autour de la moyenne espérée $E[X]$, et est définie par

$$V(x) = E[(X - E[X])^2] = \sum_{i=1}^N p_i \cdot (x_i - E[X])^2$$

Propriétés 3.2 (formule de Koenig) Elle est toujours positive puisqu'il s'agit de l'espérance d'un carré.

On a l'expression suivante :

$$V(x) = E[X^2] - (E[X])^2$$

Définition 3.7 Pour mesurer la dispersion d'une variable aléatoire X , on considère souvent en statistiques l'écart-type, lié à la variance par :

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)}$$

3.3.4 Propriétés de l'espérance et de la variance

Propriétés 3.3 (Linéarité de l'espérance) Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même univers et a, b deux réels,

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$$

En particulier, $E[aX] = aE[X]$.

Propriétés 3.4 (Non-linéarité de la variance) Pour toute variable aléatoire X et $a, b \in \mathbb{R}$

$$V(aX + b) = a^2V[X]$$

Propriétés 3.5 (Inégalité de Markov) Soit X une variable aléatoire positive d'espérance finie, alors pour tout $a > 0$

$$\mathbb{P}[X \geq a] \leq \frac{1}{a}E[X]$$

Propriétés 3.6 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev) Soit X une variable aléatoire réelle de variance finie, alors pour tout $a > 0$

$$\mathbb{P}[|X - E[X]| \geq a] \leq \frac{1}{a^2}V(X)$$

3.4 Lois de probabilité discrètes usuelles

Lois discrètes usuelles On considère une variable aléatoire discrète X sur un univers quelconque Ω . Lorsque X prend n valeurs, l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X est désigné par $(x_i)_{i=1\dots n}$, i.e. $(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$, et $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ lorsque X en prend une infinité. Le comportement aléatoire de X peut être très différent selon les phénomènes étudiés, et toute forme de loi est a priori envisageable. Cependant, certains paramètres objectifs de caractérisation (moyenne, dispersion, etc.) permettent de dégager des comportements récurrents et des familles de lois qui permettent une modélisation approchée raisonnable de la plupart des phénomènes aléatoires courants. Nous décrivons ici les lois discrètes les plus importantes, à travers certains exemples de modélisations.

3.4.1 Bernoulli $B(p)$

Définition 3.8 Cette loi est celle de toute variable aléatoire X modélisant une expérience dont l'issue ne possède que deux alternatives de type "succès ou échec", "vrai ou faux", "marche ou arrêt", "pile ou face", etc. Un succès est représenté par l'événement $\{X = 1\}$ tandis que $X = 0$ correspond à un échec $X(\Omega) = \{0, 1\}$. Puisque l'on a $P[X = 0] = 1 - P[X = 1]$, la loi de X ne dépend que d'un paramètre (la probabilité de succès); on parle alors de la loi de Bernoulli de paramètre p caractérisée par

$$P[X = 1] = p$$

$$P[X = 0] = 1 - p$$

Propriétés 3.7 (Espérance et variance)

$$E[X] = p$$

$$V[X] = p(1 - p)$$

3.4.2 Binomiale $B(n; p)$

Définition 3.9 La loi binomiale est la loi de probabilité d'une variable aléatoire représentant une série d'épreuves de Bernoulli possédant les propriétés suivantes :

- Chaque épreuve donne lieu à deux éventualités exclusives de probabilités constantes p et $q = 1..p$.
- Les épreuves répétées sont indépendantes les unes des autres.
- La variable aléatoire X correspondante prend pour valeur le nombre de succès dans une suite de n épreuves.

Deux paramètres, le nombre d'épreuves (identiques mais indépendantes) répétées n et la probabilité p de succès dans l'épreuve de Bernoulli en question caractérisent cette loi. Lors d'une telle expérience, on dit que X suit une binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, à valeurs dans $X() = \{1, 2, \dots, n\}$.

Propriétés : Les probabilités élémentaires d'une variable aléatoire X suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ sont données pour tout nombre de succès $k = 1 \dots n$ par :

$$P[X = k] = C_k^n \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Propriétés : On a bien, en utilisant la formule du binôme,

$$\sum_{k=0}^n P[X = k] = \sum_{k=0}^n C_k^n \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} = 1$$

Propriétés : (Espérance et variance)

$$E[X] = np$$

$$V[X] = np(1 - p)$$

Démonstration :

On a l'écriture $X = X_1 + X_2 + \dots + X_k + \dots + X_n$, où les X_k sont n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes. On a en effet par linéarité de l'espérance

$$E[X] = E[X_1] + E[X_2] + \dots + E[X_k] + \dots + E[X_n] = n \cdot E[X_1] = n \cdot p$$

et par indépendance des variables aléatoires $(X_k)_{k=1 \dots n}$

$$V[X] = V[X_1] + V[X_2] + \dots + V[X_k] + \dots + V[X_n] = n \cdot V[X_1] = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

3.4.3 Poisson $P(\lambda)$

Lorsque le nombre d'épreuves n devient très important, la manipulation de la loi binomiale devient elle très fastidieuse et est parfois remplacée en première approximation par son homologue asymptotique, la loi de Poisson (théorème 7). Celle-ci évalue le nombre aléatoire d'événements de même probabilité pendant une durée donnée. Elle peut modéliser par exemple le nombre d'appels recus par un standard téléphonique, le nombre de voyageurs se présentant à un guichet dans la journée, etc. Pour des raisons tues ici, elle s'exprime à l'aide de la fonction exponentielle et dépend d'un paramètre $\lambda > 0$, qui correspond au nombre moyen d'occurrence du phénomène observé pendant la durée donnée. Plus formellement :

Définition 3.10 Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, notée $\mathcal{P}(\lambda)$ lorsque $X(\Omega) = N$ et pour tout $k \in N$

$$P_X(k) = P[X = k] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Propriétés 3.11

$$P[X = k + 1] = \frac{\lambda}{k + 1} P[X = k]$$

Propriétés 3.12 (Espérance et variance)

$$E[X] = \lambda$$

$$V[X] = \lambda$$

3.4.4 loi géométrique $\mathcal{G}(p)$

Définition 3.11 On répète continuellement et de façon indépendante une expérience de deux résultats dont la probabilité de succès est p . Soit X le nombre d'expérience pour obtenir un premier succès alors X suit une loi géométrique de paramètre p on le note $\mathcal{G}(p)$

$$P[X = k] = (1 - p)^{k-1} p$$

Propriétés 3.13 (Espérance et variance)

$$E[X] = \frac{1}{p}$$

$$V[X] = \frac{1 - p}{p^2}$$

Exemple : On lance un dé continuellement jusqu'à l'obtenir d'un six soit x le nombre de lancer nécessaire.

- 1) Quelle est la probabilité d'obtenir un premier 6 à la deuxième lance.
- 2) calculer $E(x)$, $V(x)$ et $\sigma(x)$

Solution :

1-

$$p = 1/6, \quad x = 2$$

$$P(X = 2) = (1 - p)^{x-1} p = (1 - 1/6)^{(2-1)} = 5/6$$

2-

$$E(x) = 1 / ((1/6)) = 6$$

$$V(x) = ((5/6)) / ((1/36)) = 30$$

3.4.5 loi hypergéométrique $H(N; n; D)$

Définition 3.12 On tire sans remis n objet d'un ensemble de N objet dont D possédant une caractéristique partiaire (et les autre $N-D$ ne possédant pas) Soit x le nombre d'objet de l'échantillon que possédant le caractéristique (nombre que tire-parmi D) Alors $X \rightarrow \mathcal{H}(N, n, D)$

$$P[X = x] = \frac{C_x^D C_{n-x}^{N-D}}{C_n^N}$$

Propriétés 3.14 (Espérance et variance)

$$E[X] = n \frac{D}{N}$$

$$V[X] = n \frac{D}{N} \left(1 - \frac{D}{N}\right) \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

Exemple · Une boite contient 8 composantes parmi les quelle 2 sont défectueuse trois composants sont pris au hasard est sans remise de la boite Soit x le nombre de composants défectueuses dans l'échantillon.

- 1) Donner la loi de probabilité ?
- 2) calculer $E(x)$, $V(x)$?

Solution :

$$N = 8, n = 3, D = 2$$

$$P[X = x] = \frac{C_x^2 C_{3-x}^{8-2}}{C_3^8} = \frac{C_x^2 C_{3-x}^6}{C_3^8}$$

2-

$$E(x) = 3 \times \frac{2}{8} = \frac{3}{4}$$

$$V(x) = 3 \times \frac{2}{8} \left(1 - \frac{2}{8}\right) \left(\frac{5}{7}\right)$$

3.5 Variable aléatoires continues

Définition 3.13 On appelle variable aléatoire continue une variable aléatoire dont l'ensemble des valeurs est $\mathbb{R}$ ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.

3.5.1 Fonction de répartition

On considère une variable aléatoire X de fonction de répartition F_X

$$F(x) = P[X \leq x]$$

Propriétés 3.15 *On a les propriétés suivantes :*

- F est une continue,
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$,
- F est une fonction croissante,
- Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$,

$$F(b) - F(a) = \mathbb{P}[a < X \leq b]$$

Le défaut de la fonction de répartition (que ne possède pas la notion de loi des variables aléatoires discrètes) est qu'elle ne fait pas apparaître l'additivité des probabilités. Fort du parallèle que l'on peut faire entre probabilités et surfaces, il est très avantageux de restreindre l'étude à une classe de variables aléatoires dites à densité.

3.5.2 Fonction de densité

Définition 3.14 *Une variable aléatoire possède une densité si F_x est dérivable. La dérivée notée f_X est appelée densité de probabilité de la variable aléatoire X .*

Propriétés 3.16 *De ce fait,*

$$\mathbb{P}[a \leq X \leq b] = \int_a^b f_X(t)dt$$

, et la probabilité de trouver X dans un intervalle $[a; b]$ donné apparaît comme l'aire d'une partie du graphique située entre la courbe de la densité f_X et l'axe des abscisses.

Remarque 3.3 *Dans les applications, il n'est pas nécessaire de calculer ces aires à l'aide de calculs car des tables de lois recapitulant les valeurs principales existent.*

Propriétés 3.17 *La donnée d'une densité f permet donc de décrire complètement notre variable aléatoire en caractérisant sa loi grâce aux propriétés suivantes :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(X)dx = 1$$

$$P[a < X \leq b] = F(b) - F(a) = \int_a^b f(X)dx$$

3.6 Lois de probabilité continues usuelles

3.6.1 Uniforme $U([a; b])$

Cette loi modélise un phénomène uniforme sur un intervalle donné.

Définition 3.15 La v.a. X suit une loi uniforme sur l'intervalle borné $[a, b]$ si elle a une densité f constante sur cet intervalle et nulle en dehors. Elle est notée $\mathcal{U}([a, b])$. Sa densité est alors,

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{si } x \in [a; b]; \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette loi est l'équivalent continue de la loi discrète équirépartie. Son espérance est $E[X] = (b-a)/2$ et sa variance est $Var(X) = (b-a)^2/12$. Le résultat suivant permet d'éviter des calculs fastidieux pour déterminer la probabilité uniforme d'un intervalle.

Propriétés 3.18 Si X est une v.a de loi uniforme sur $[a; b]$ alors pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(X \in I) = \frac{l([a; b] \cap I)}{l([a; b])}$$

où $l(J)$ désigne la longueur de l'intervalle J (ex : $l([a; b]) = b - a$).

3.6.2 Exponentielle (λ)

Définition 3.16 Soit λ un réel strictement positif. La v.a X suit une loi exponentielle de paramètre λ , notée $\varepsilon(\lambda)$, si elle admet pour densité :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} [0; +1[(x)$$

Son espérance est $E(X) = 1/\lambda$ et sa variance est $var(X) = 1/\lambda^2$. Les lois exponentielles sont souvent utilisées pour modéliser des temps d'attente ou des durées de vie. Par exemple, les temps d'attente à partir de maintenant du prochain tremblement de terre, de la prochaine panne d'un appareil, de la prochaine désintégration dans un réacteur nucléaire suivent des lois exponentielles. Le paramètre λ désigne alors l'inverse du temps d'attente moyen.

3.6.3 Normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Définition 3.17 Il s'agit d'une modi-

cation "spatiale" de la Loi normale : la forme en cloche de la densité est la propriété principale de la famille des lois normales, qui peuvent éventuellement être translatée pour devenir asymétrique d'espérance non nulle μ , ou dilatée ou contractée autour de la moyenne en jouant sur la variance (Voir la figure 4.2 page 44). La densité est modifiée en

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

L'usage d'un changement de variable $t = \frac{(x-\mu)}{\sigma}$ permet de se ramener à un calcul d'intégrale à partir de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, ce qui nous permettra de consulter les tables existant pour la loi standard précédente. On a le théorème suivant :

Théorème 3.2 Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ et Z la variable aléatoire définie par

$$Z = \frac{(X - \mu)}{\sigma}$$

suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

Propriétés 3.19 (*Espérance et variance*)

$$E[X] = \mu$$

$$V[X] = \sigma^2$$

Remarque 3.4 On notera Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(1, 0.5)$. On utilise les valeurs de $\Phi(a)$ tabulées et le changement de variable pour calculer les valeurs de la fonction de répartition F d'une loi normale générale.

Exemple 3.13 Considérons X une v. a. qui suit une loi $\mathcal{N}(6, 4)$ et Z une v.a. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, on a par exemple

$$\begin{aligned} F_X(7) &= \mathbb{P}[X \leq 7] \\ &= \mathbb{P}\left[\frac{X - 6}{2} \leq \frac{7 - 6}{2}\right] \\ &= \mathbb{P}\left[X \leq \frac{1}{2}\right] \\ &= \Phi\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 0.6915 \end{aligned}$$

Les valeurs ne sont tabulées que pour des valeurs de a positives, mais on s'en sort à l'aide de la propriété suivante de la fonction de répartition Φ de la loi normale :

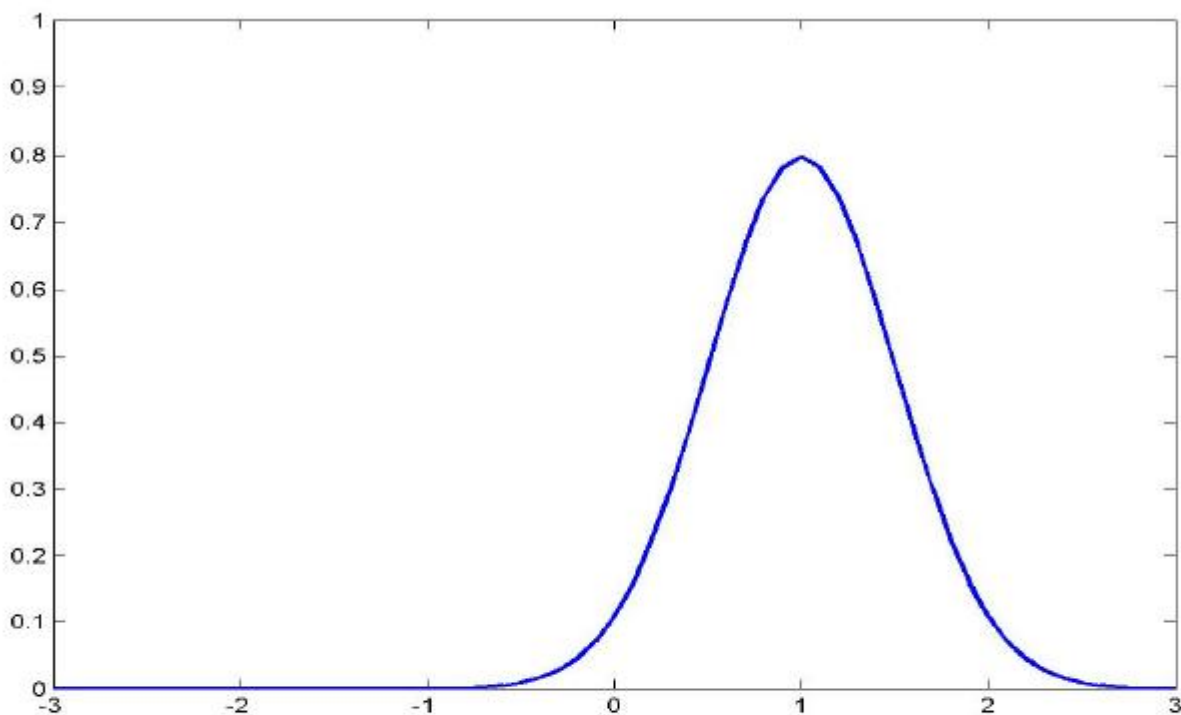


TABLE – Densité de probabilité de la loi normale $\mathcal{N}(1, 0.5)$.